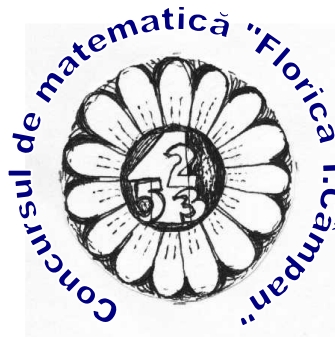


CONCURSUL DE MATEMATICĂ  
**FLORICA T. CÂMPAN**  
EDIȚIA A X-A  
ETAPA JUDEȚEANĂ, 20 FEBRUARIE 2010



**Clasa a VII-a**  
**BAREM**

**SUBIECTUL I**

a) Dacă  $x \in \mathbb{Z}$  și  $\frac{3x+2}{4x-3} = y \in \mathbb{Z}$ , atunci  $\frac{4x-3}{3x+2} = \frac{1}{y} \in \mathbb{Z}$  și atunci  $y \in \{-1; +1\}$ . (3p)

$\frac{3x+2}{4x-3} = -1$  implică  $3x+2 = -4x+3$ , de unde  $7x = 1$ , imposibil, căci  $x \in \mathbb{Z}$ . (1p)

$\frac{3x+2}{4x-3} = 1$  implică  $3x+2 = 4x-3$ , de unde  $x = 5$ . (1p)

b) Căutăm numere naturale  $x$  pentru care  $F(x) \in \mathbb{N}$ , cea ce este echivalent cu  $(n+1)x - n \mid nx + n - 1$  și  $(n+1)x - n \mid (n+1)x - n$ , de unde  $(n+1)x - n \mid (n+1) \cdot n \cdot x + n^2 - 1$  și  $(n+1)x - n \mid n(n+1) - n^2$  și atunci  $(n+1)x - n \mid 2n^2 - 1$ . (2p) Alegem doi divizori ai lui  $2n^2 - 1$ : 1 și  $2n^2 - 1$ . Prin urmare  $(n+1)x - n = 1$ , de unde  $(n+1)x = n+1$  și  $x=1$ , 1 impar, și  $(n+1)x - n = 2n^2 - 1$ , de unde  $(n+1)x = 2n^2 + n - 1$ , adică  $(n+1)x = (n+1)(2n-1)$  și  $x = 2n - 1$ ,  $2n - 1$  impar. (3p)

$$F(1) = \frac{n \cdot 1 + n - 1}{(n+1) \cdot 1 - n} = \frac{2n-1}{1} = 2n-1 \text{ și } F(2n-1) = \frac{n \cdot (2n-1) + n - 1}{(n+1) \cdot (2n-1) - n} = \frac{2n^2-1}{2n^2-1} = 1.$$

Prin urmare, putem alege  $a = 1$  și  $b = 2n - 1$ . (3p) Din oficiu 2p.

**SUBIECTUL II**

a) Datorită simetriei rezultă că aria figurii obținute este dublul ariei pătratului. (3p)

b) Se arată că se obține un patrulater cu laturile ce trec prin vârfurile pătratului. (3p)

c) Din  $OA_1 \cdot OA_4 = OA_2 \cdot OA_3$  rezultă că  $\frac{OA_1}{OA_3} = \frac{OA_2}{OA_4}$  și atunci  $A_1A_2 \parallel A_3A_4$ . (2p) Din unghiuri

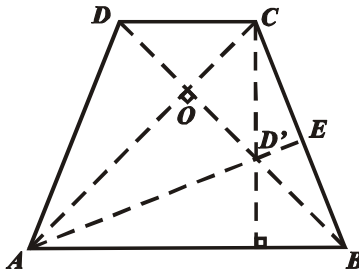
opuse la vârf deducem că  $O$  se află pe o diagonală. (2p) Se obține un trapez (eventual paralelogram). În final, arată că  $\mathcal{F}$  este un trapez isoscel ortodiagonal (eventual pătrat dacă  $O$  este centrul pătratului inițial). Figura  $\mathcal{F}$  are drept axă de simetrie diagonală pătratului pe care se află  $O$ . (3p) Din oficiu 2p.

**SUBIECTUL III**

a)  $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BDC$  implică  $\triangle OCD$  isoscel, de unde  $[OC] \equiv [OD]$  (1).

Deoarece  $AB \parallel CD$  avem că  $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BAC$  și  $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle ABD$  (alterne interne). (3p) Cum  $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BDC$ , rezultă că  $\triangle OAB$  este isoscel și  $[OA] \equiv [OB]$  (2).

(3p)



**b)** În  $\triangle ABC$ ,  $(BO)$  și  $(AE)$  ( $AD' \cap BC = \{E\}$ ) sunt înălțimi, de unde rezultă că  $D'$  este ortocentrul lui și, deci,  $CD' \perp AB$ . (4p) Cum  $AB \parallel CD$ , rezultă că  $CD' \perp CD$ , adică  $\triangle CDD'$  este dreptunghic în  $C$ . Cum  $[CO]$  este mediana corespunzătoare ipotenuzei  $(DD')$ , avem  $CO = \frac{DD'}{2} = DO$ , căci  $D'$  este simetricul lui  $D$  față de  $O$ . Din  $(CO) = (DO)$  rezultă că  $\triangle OCD$

Obs. La a) și b) sunt adevărate și reciprocele (la **b**), dacă  $ABCD$  este trapez isoscel și  $AC \perp BD$  atunci  $AD' \perp BC$ ). (3p) Din oficiu 2p.

*Notă.* Există soluții fără a evidenția că  $D'$  este ortocentru. Arată că  $\triangle DOA \sim \triangle COB$ , de aici deduce că  $OC = OD$ .